

建築基礎構造設計指針による沈下式の問題点と修正沈下式

平井弘義 ● 応地研(株)

はじめに

建築物基礎の構造計算において、許容応力度法を採用することが多く、地盤の許容応力度と沈下量を算定するために、原地盤を砂質土と粘性土に分類し、また原地盤は多層地盤としてモデル化される。従来多くの場合、国土交通省告示第1113号(以下、新告示という)¹⁾ および「建築物の構造関係技術基準解説書」など^{2)~4)}に基づき、多層地盤の許容応力度及び沈下量の算定法に関する研究^{5)~12)}が行われてきている。

多層地盤の即時沈下量に関して、積下^{13)~15)}は多層弾性体に関する厳密解を求めることによって、Odemark¹⁶⁾の近似法による変位解およびSteinbrenner^{17), 18)}の近似式についてそれぞれの精度を明らかにした。遠藤¹⁹⁾は、二層地盤におけるBarber²⁰⁾の方法を用いて等価弾性率を提案し、多層地盤に適用した。また、Odemark¹⁶⁾、上田ら²¹⁾、およびNascimento²²⁾による近似計算法が提案されているが、問題点として繰り返し計算を行うため解が閉じた形(closed form)になっていないことが挙げられる。

一方、建築基礎構造設計指針²³⁾(以下本指針という)における即時沈下式(以下指針式という)が従来採用されているが、この指針式は、多層地盤の境界条件を満足せず、厳密解を適切に表せないことが明らかになった^{10)~12)}。多層地盤の即時沈下

量に関して、著者ら^{10)~12)}は地盤の各層ごとの剛性の影響を適切に沈下量計算に組み込むように、等価換算厚を二層地盤に適用したBarber²⁰⁾の方法を多層地盤に一般化し、即時沈下量に関する近似計算式を提案した。最近、姫野²⁴⁾、松井²⁵⁾は多層地盤における弾性解析プログラムを開発し、既往の提示された即時沈下の厳密解に非常に近く、極めて精度の高い数値結果を示した。

指針式として本指針の中で式(5, 3, 3)によって与えられる即時沈下式は、もともとSimons²⁶⁾によって最初に提案されたものであるが、ここでは厳密解との比較および近似解としての精度については検討されていない。これまで指針式の妥当性について疑問点が指摘されてきたのにもかかわらず、その内容が設計者・研究者などに十分理解されていなかったため、少なからぬ混乱が生じていた。そこで、指針式を改めて詳細に検討し、その問題点を指摘し、新たに妥当性のある修正式を提示していく。

沈下式

Barber²⁰⁾は二層地盤の表面変位を求めるための近似計算法を提案した。彼は二層弾性体の第一層を第二層と同じ弾性係数をもつ層で置き換えるのに、弾性体の層を平板として仮定し、層の曲げ剛性を等しく保てばよいと考えた。参考文献10)および11)においては、基礎剛性に関して、た

わみ性基礎を仮定し、Barberによって提案された二層地盤に関する近似計算法を多層地盤に一般化した近似解析法を提案した。図1の多層弾性体における第 m 層の弾性係数を E_m 、ポアソン比を ν_m と書けば、第 m 層の曲げ剛性 D_m は次のように定義される。

$$D_m = \frac{E_m H_m^3}{12(1-\nu_m^2)} \quad \dots (1)$$

図1に示す多層弾性体において、第 n 層の弾性係数を E_n 、ポアソン比を ν_n と書くことにする。この場合、第 n 層と同じ弾性係数をもつ層で第 m 層を置き換えるのに、層の曲げ剛性を等しく保つようにすれば、次式を得る。

$$\frac{E_n H_{mc}^3}{12(1-\nu_n^2)} = \frac{E_m H_m^3}{12(1-\nu_m^2)} \quad (2)$$

ここに、 $H_{mc} = (m-1) \sim (n-1)$ は多層地盤の第 m 層の厚さ H_m に対する等価弾性体における等価換算厚である。図2は図1に示す多層弾性体に対する等価換算厚を有する等価弾性体を表している。

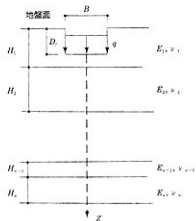


図1 多層弾性体

それゆえ、等価弾性体の第1層から第*n*-1層までの等価換算厚 H_{me} は(3)式のようになる。

$$H_{1e} - D_f = \left[\frac{E_1 (1-\nu_a^2)}{E_n (1-\nu_n^2)} \right]^{1/3} (H_1 - D_f)$$

$$H_{ne} = \left[\frac{E_n (1-\nu_n^2)}{E_1 (1-\nu_1^2)} \right]^{1/3} H_n$$

$$(m=2 \sim (n-1)) \quad \dots (3)$$

図1の多層地盤の地盤面から基礎底面までの深さ D_f において、荷重 q を受ける長辺 L 、短辺 B の長方形基礎に対する基礎底面における即時沈下量 S_i に関して、指針式²³⁾は(4)式のように与えられる。

$$S_i = \left| \frac{I_s (H_{1e}, \nu_1)}{E_1} + \sum_{k=2}^n \frac{I_s (\sum_{j=1}^k H_{je}, \nu_k) - I_s (\sum_{j=1}^{k-1} H_{je}, \nu_k)}{E_k} \right| q B$$

$$\dots (4)$$

一方、修正沈下式(以下修正式という)^{10)~12)}は(5)式のように示される。

$$S_i = \left| \frac{I_s (H_{1e}, \nu_n)}{E_1} + \sum_{k=2}^n \frac{I_s (\sum_{j=1}^k H_{je}, \nu_n) - I_s (\sum_{j=1}^{k-1} H_{je}, \nu_n)}{E_k} \right| q B$$

$$\dots (5)$$

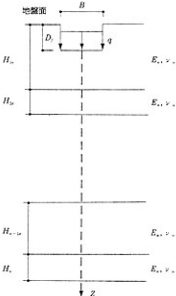


図2 等価弾性体

ここに

$$I_s (Z, \nu) = K(0, \nu) - K(Z, \nu) \quad (6)$$

$$K(Z, \nu) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi} \left[\log_e \left(\frac{\sqrt{1+m^2+n^2}+m}{\sqrt{1+n^2}} \right) + m \log_e \left(\frac{\sqrt{1+m^2+n^2}+1}{\sqrt{m^2+n^2}} \right) - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} n \tan^{-1} \left(\frac{m}{n\sqrt{1+m^2+n^2}} \right) \right]$$

$$m = L/B, \quad n = 2Z/B$$

また、図1の多層地盤の地盤面から基礎底面までの深さ D_f において荷重 q を受ける半径 a の円形基礎に対する基礎底面における即時沈下量 S_i は、式(4)と式(5)において $B=2a$ とし、式(7)の $K(Z, \nu)$ を次式によって置き換えれば、与えられる。

$$K(Z, \nu) = (1-\nu^2) \left\{ \sqrt{1 + \frac{Z^2}{a^2}} - \frac{Z}{a} \right\} \times \left| 1 + \frac{Z}{a} \sqrt{1 + \frac{Z^2}{a^2}} \right|$$

$$\dots (8)$$

次に、指針式(4)を修正式(5)と比較してみると、以下の点が相違している。

①式(6)によって与えられる関数 $I_s(Z, \nu)$ の最初の引数において、指針式(4)は各層の層厚 H_j ($j=1 \sim n$)を単に重ね合わせているが、修正式(5)は各層の等価換算厚 H_{je} の総和である。

②関数 $I_s(Z, \nu)$ の二番目の引数において、指針式(4)は各層ごとのポアソン比 ν_j を用いているが、修正式(5)は基準層である第*n*層のポアソン比 ν_n のみを使用している。

以上の結果について考察すると次のようになる。地盤を半無限の等方等質弾性体と仮定した場合、地表面と無限遠の境界条件を満足させるように、基本解に含まれる未知数を決定すれば、鉛直荷重の形式に対応して諸種の厳密解が得られる^{17), 18), 27)~34)}。本稿において示された式(7)

と式(8)は、それぞれ長方形荷重と円形荷重に対応した解である。また、地盤中に空洞等を有する場合に関しては、平井^{35), 36)}によって三次元弾性解析手法と厳密解が提案された。

一方、多層地盤を半無限の等方異質弾性体として仮定すれば、地表面と無限遠のみならず、各層の接触面(境界面)においても変位および応力に関する境界条件を満足させるように、基本解の未知数を決定し、厳密解を求めることになる。しかし、そのような解析手法は層数が2以上になると、基本解の未知数を決めるために大変複雑な数値積分等の計算を必要とするため、厳密解が提示された文献^{13)~15), 37)~43)}は極めて少ないのが現状である。

そこで、基本解が境界条件を自動的に満足するような近似的な等価手法として、弾性体の層を平板として考え、層の曲げ剛性を等しく保つように多層弾性体を等方等質弾性体として置き換えることが仮定され、Barber²⁰⁾は等価換算厚を用いた二層弾性体の近似計算法を提示した。

この計算法では、等方等質弾性体として仮定されているので、基本解は地表面と無限遠のそれぞれの境界条件を満足しており、多層弾性体の各層ごとの接触面(境界面)における境界条件を、等価換算厚を有する置換された等方等質弾性体においては考慮する必要がないことになる。本稿の修正式もそのような考え方に沿って検討され、Barberの式を多層弾性体へ一般化している。それゆえ、修正式においては、弾性係数 E_n 、ポアソン比 ν_n と等価換算厚 H_n を有する等方等質弾性体の等価弾性体に関する変位と応力を検討し、その結果を元の多層弾性体と関連付け、地盤面における修正式 w_{ip} は次のように書ける。

$$w_{1p} = E_n/E_1 (w_{1e} - w_{2e}) + E_n/E_2 (w_{2e} - w_{3e}) + \dots + E_n/E_{n-1} (w_{n-1e} - w_{ne}) + w_{ne} - w_{n+1e} \quad \dots (9)$$

ここに、 w_{me} は弾性係数 E_n を有する等価弾性体の深さ($H_1 + H_2 + \dots + H_{n-1}$)における沈下量である。

一方、地盤面における指針式 w_{1p} は次のように書ける。

$$w_{1p} = E_n/E_1 (w_{1i} - w_{2i}) + E_n/E_2 (w_{2i} - w_{3i}) + \dots + E_n/E_{n-1} (w_{n-1i} - w_{ni}) + w_{ni} - w_{n+1i} \quad \dots (10)$$

ここに、 w_{mi} は弾性係数 E_n を有する弾性体の深さ($H_1 + H_2 + \dots + H_{n-1}$)における沈下量である。

指針式においては、変位および応力に関する境界条件を満足するような近似的な等価手法は用いられてい

ないため、多層弾性体の各層の接触面(境界面)における境界条件が満足されうことは保証されない。それゆえ、多層弾性体の材料特性が等方質弾性体から等方異質弾性体へと顕著に変化するに連れて、すなわち各層の弾性係数の違いが大きくなるに連れて、指針式は厳密解と比較すると精度が悪くなることが予想され、事実この点が後の計算例で明らかとなる。

一方、多層弾性体では層数が増えるに連れて、境界条件を満足する厳密解を求めることは、大変複雑な作業となるが、二層弾性体のBarberによる等価換算厚を一般化し、本稿において提示された修正式は、境界条件を近似的ではあるが自動的に満足させているため、近似解法とはいえ精度の高い解を与えることを後の計算例に示す。

用する円形等分布鉛直荷重を示しており、図4は二層地盤の弾性係数比が異なる場合について、載荷中央部で地盤面における変位係数を示している。ここで変位係数 F は基礎底面における実際の鉛直変位 S_i を aq/E_2 で除した形、すなわち、

$$F = S_i / (aq/E_2)$$

で定義されている。図4中の厳密解^{44)~46)}においては、一層と二層の接触面(境界面)が粗の場合、すなわち境界面においてせん断応力の連続性がある場合に関する計算結果が示されている。 E_1 と E_2 の比が大きくなるほど、変位係数は小さくなっていくのがわかり、Barberの式は二層地盤としての厳密解を精度よく表現していることがわかる。

一方、指針式は二層地盤の弾性係数の違いが大きくなるに連れて、厳密解との相違が大きくなるのがわかる。

これは、以前詳しく説明したが、指針式では第一層と第二層の接触面(境界面)における境界条件が満足されていないためである。

図5は、三層地盤の地盤面において半径 a の円形基礎が円形等分布鉛

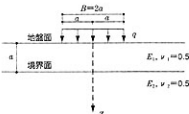


図3 地盤面に作用する円形等分布鉛直荷重

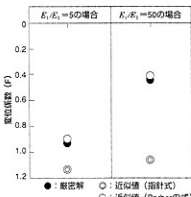


図4 載荷中央部・地盤面における鉛直変位

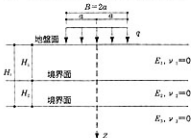


図5 三層地盤の地盤面に作用する円形等分布鉛直荷重

沈下式の妥当性の検討

修正式における二層地盤に関してはBarber²⁰⁾の式となるので、Barberの式と指針式の妥当性を検討する。図3は二層地盤において地表面に作

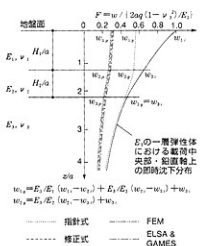


図6 地盤面において円形等分布鉛直荷重を受ける三層弾性体に関する載荷中央部・鉛直軸上の即時沈下 (Case1)

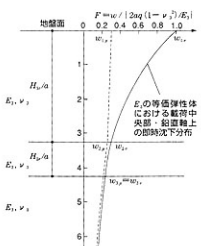


図7 等弾性体における載荷中央部・鉛直軸上の即時沈下および三層弾性体における即時沈下算定 (Case1)

直荷重 q を受ける場合である。図6は、図5の多層地盤に関する載荷中央部・鉛直軸上の即時沈下を示しており、 $H_1=H_1+H_2$, $H_2/a=2.0$, $H_1/H_2=0.6$, $E_2/E_3=2.0$, $E_1/E_3=20.0$, $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0.5$ のCase1の場合である。図6の中の指針式²³⁾においては、 E_3 の第一層弾性体における載荷中央部・鉛直軸上の沈下分布を基準として、各層の弾性係数比を考慮して沈下分布が式(10)により計算されている。

一方、修正式においては、図7に示す E_3 の等価弾性体における載荷中央部・鉛直軸上の沈下分布を基準として、各層の弾性係数比を考慮して沈下分布が式(9)により算定され、この結果は図6における三層地盤における沈下分布として示されている。

次に、図8は、 $H_1=H_1+H_2$, $H_2/a=2.0$, $E_2/E_3=2.0$, $E_1/E_3=200.0$, $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0.5$ のCase2の場合について、即時沈下分布を示しており、改良地盤のように第一層の弾性係数が原地盤としての第二層と第三層の弾性係数と比べて非常に大きくなるような場合に該当する。

図6～図8に示された地盤面の変位係数 F に関して、修正式、姫野²⁴⁾お

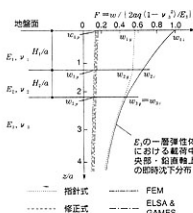


図6 地盤面において円形等分布鉛直荷重を受ける三層弾性体に関する載荷中央部・鉛直軸上の即時沈下 (Case2)

よび松井²⁵⁾による多層弾性解析(以下、ELSA & GAMESという)およびFEM¹⁴⁾による解は厳密解¹⁴⁾, ¹⁵⁾をよく表現しており、第一層の剛性が大きくなるに連れて、沈下量は小さくなるのがわかるが、一方指針式は定量的にこの傾向を表現できない。

次に、図9と図10は、図5の三層地盤の地盤面において半径 a の円形基礎が円形等分布鉛直荷重 q を受ける場合について、変位係数と厚さ比との関係を示し、 $H_2=H_1+H_2$, $H_2/a=2.0$, $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0.5$ である。

図9は厳密解¹⁴⁾, ¹⁵⁾、指針式²³⁾およびFEM¹⁴⁾による計算結果を示し、図10においては、厳密解¹⁴⁾, ¹⁵⁾、ELSA & GAMES²⁴⁾, ²⁵⁾および修正式による計算結果のそれぞれの値が示されている。前述のように三層弾性体の厳密解は極めて少なく、厳密解の信頼性を検証することが、近似解の精度を確認するうえで重要となる。

そこで、図9と図10で示される厳密解を、植下^{13)~15)}はKirk³⁸⁾の計算結果と比較し、三層地盤の厳密解として信頼性が高いことを明らかにしたので、図9と図10における弾性係数の値を植下による文献¹⁴⁾, ¹⁵⁾と同様に設定した。ここで変位係数 F は基礎底面における実際の鉛直変位 S_1 を $2(1-\nu_3^2)aq/E_3$ で除した形、すなわち、 $F=S_1/2(1-\nu_3^2)aq/E_3$

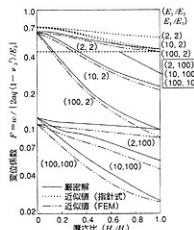


図9 厳密解、近似値(指針式)および近似値(FEM)の比較

で定義されている。

図9と図10から、指針式は図5に示す多層地盤において、三層の弾性係数の違いが大きくなるに連れて、厳密解との相違が大きくなるのがわかる。この傾向は以前詳述されているが、指針式では、各層の接触面(境界面)における境界条件が満足されていないためである。一方、各層の弾性係数比が異なるいずれの場合でも、修正式では各層の接触面(境界面)における境界条件が近似的ではあるが、自動的に満足されているため、修正式による近似値は全般的に厳密解を適切に表していることがわかる。また、図に示される地盤面の変位係数 F に関して、FEM¹⁴⁾およびELSA & GAMESの多層弾性解析²⁴⁾, ²⁵⁾による解は、修正式と同様な傾向を示し、厳密解¹⁴⁾, ¹⁵⁾をよく表現していることがわかる。

まとめ

地盤の即時沈下量を算定するために、原地盤を多層弾性体としてモデル化し、次のような結果が得られた。1) 即時沈下に関する指針式は多層地盤の接触面(境界面)における境界条件を満足していないので、地盤の各層ごとの剛性の影響を適切に沈下量計算において考慮できない。そ

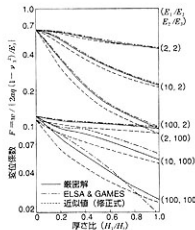


図10 厳密解、ELSA & GAMESおよび近似値(修正式)の比較

のため、多層地盤における弾性係数の違いが大きくなるに連れて、指針式と載密解との相違が大きくなるのが分かった。また修正式、有限要素法 (FEM) および多層弾性解析 (ELSA & GAMES) などの他の解析手法との比較においても、指針式は一般的には妥当性が認められないことが明らかとなった。

2) 多層地盤の即時沈下量に関して、地盤の各層ごとの剛性の影響を適切に沈下量計算に組み込める等価換算厚を用いた方法である修正式を提示した。また、載密解、有限要素法 (FEM) および多層弾性解析 (ELSA & GAMES) などの他の解析手法と比較し、修正式の妥当性が明らかとなった。

(ひらい ひろよし)

【参考文献】

- 1) 国土交通省告示第1113号:官報, 号外第136号, pp. 4~5, 2001.
- 2) 2001年版建築物の構造関係技術基準解説書:国土交通省住宅局建築指導課, 工学図書, pp. 53~63, 2001.
- 3) 日本建築センター:改訂版 建築物のための改良地盤の設計及び品質管理指針—セメント系固化材を用いた深層・浅層混合処理工法, 2002.
- 4) 日本建築学会:建築基礎構造設計指針(第1版), pp. 117~358, 1988.
- 5) 平井弘義・亀井健史:粘性土の圧密降伏応力の推定法に関する一提案, 土と基礎, 地盤工学会, Vol. 50, No. 5, Ser. No. 532, pp. 11~13, 2002.
- 6) 平井弘義・亀井健史:サウンディング試験を用いた地盤の許容応力度の算定法に関する一提案, 日本建築学会構造系論文集, 第557号, pp. 113~120, 2002年7月.
- 7) 平井弘義・亀井健史:多層地盤の許容応力度と沈下量の算定法に関する一提案, 第47回地盤工学シンポジウム, 平成14年度論文集, 地盤工学会, pp. 61~68, 2002.
- 8) 平井弘義・亀井健史:改良地盤の許容応力度と沈下量の算定法, 第48回地盤工学シンポジウム, 平成15年度論文集, 地盤工学会, pp. 37~44, 2003.
- 9) 平井弘義:改訂版「建築物のための改良地盤の設計及び品質管理指針」—セメント系固化材を用いた深層・浅層混合処理工法—における算定式の妥当性について, 建築技術, No. 651, pp. 168~170, 2004年4月.
- 10) 平井弘義・亀井健史:多層地盤の沈下・応力・許容応力度に関する算定法,

- 日本建築学会構造系論文集, 第573号, pp. 81~88, 2003年11月.
- 11) 平井弘義・亀井健史:等価換算厚理論による多層地盤の沈下・応力・破壊・許容応力度に関する算定法, 日本建築学会構造系論文集, 第581号, pp. 79~86, 2004年7月.
- 12) 平井弘義・亀井健史:等価弾性理論を用いた改良地盤の沈下・応力解析法, セメント及びセメント系固化材を用いた固化処理土の調査・設計・施工方法及び物性評価に関するシンポジウム, 地盤工学会, pp. 319-326, 2005.
- 13) 植下協・G. G. マイヤホフ:岩盤上土層表面における弾性変位について, 土木学会論文集, No. 143, pp. 9~15, 1967.
- 14) 植下協・G. G. マイヤホフ:多層地盤における弾性変位について, 土木学会論文集, No. 144, pp. 20~26, 1967.
- 15) Ueshita, K. and Meyerhof, G. G.: Deflection of Multilayer Soil Systems, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 93, No. SM5, pp. 257~282, 1967.
- 16) Odemark, N.: Investigations as to the Elastic Properties of Soils and Design of Pavements according to the Theory of Elasticity, Statens Vaginstitut, Meddelande, No. 77, Stockholm, 1949.
- 17) Steinbrenner, W.: Tafeln zur Setzungsrechnung, Die StraBe, Vol. 1, 1934.
- 18) Steinbrenner, W.: Bodenmechanik und zeitlicher Strassenbau, Symposium by 24 authors, Volk und Reich Verlag, Berlin, 1936.
- 19) 遠藤 靖:アスファルト舗装の計算[2], 道路建設, 7月号, pp. 24~31, 1962.
- 20) Palmer, L. A. and Barber, E. S.: Soil Displacement under a Circular Loaded Area, Proc. Highway Res. Board, Vol. No. 532, pp. 279~286, 1940.
- 21) 上田嘉男・西中村和利・増井隆:擁壁性舗装に対する層構造の考え方, 第7回日本道路会議論文集, pp. 432~435, 1963.
- 22) Nascimento, U., Seguro, J. M., da Costa, E., and Pinela, S.: A Method of Designing Pavements for Road and Airports, Proc. 5th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Vol. 2, pp. 283~288, 1961.
- 23) 日本建築学会:建築基礎構造設計指針(第2版), pp. 105~456, 2001.
- 24) 堀野賢治:多層弾性解析プログラム, Elastic Layer System Analysis, 1968.
- 25) 松井邦人・Maina, J. W.:多層弾性解析プログラム, General Analysis of Multi-layered Elastic Systems, 2004.
- 26) Simons, N. and Menzies, B. K.: A Short Course in Foundation Engineering, Butterworth, 1977.
- 27) Love, A. E. H.: The Stress Produced in a Semi-Infinite Solid by

- Pressure on part of Boundary, Phil. Trans. Roy. Soc., London, Series A., Vol. 228, 1929.
- 28) Harr, M. E.: Foundations of Theoretical Soil Mechanics, McGraw-Hill, 1966.
- 29) Boussinesq, J.: Love, A. E. H., 1944, 参照.
- 30) Love, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed. Dover, New York, 1944.
- 31) 最上武雄:土質力学, 技報堂出版, pp. 221~330, 1960.
- 32) 木村 圭:土の応力伝播, 鹿島出版会, pp. 9~140, 1978.
- 33) 宮本 博:3次元弾性論, 裳華房, pp. 16~64, 1967.
- 34) 中原一郎他:弾性学ハンドブック, 朝倉書店, pp. 281~470, 2001.
- 35) Hirai, H. and Satake, M.: Stress Analysis of a Penny-Shaped Crack Located Between Two Spherical Cavities in an Infinite Solid, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 47, No. 4, pp. 806~810, 1980.
- 36) Hirai, H. and Satake, M.: Stress Analysis of a Penny-Shaped Crack Located Between Two Oblate Spheroidal Cavities in an Infinite Solid, International Journal of Engineering Science, Vol. 19, pp. 1283~1291, 1981.
- 37) Schiffman, R. L.: The Numerical Solution for Stresses and Displacements in a Three-layer Soil System, Proc. 4th Int. Conf. Soil Mech. and Found. Eng., Vol. 2, pp. 169~173, 1957.
- 38) Kirk, J. M.: Beregning af Nedsyningen i lagdelte Systemer, Dansk Vejtidskrift, Vol. 38, No. 12, pp. 294~296, 1961.
- 39) Acum, W. E. A. and Fox, L.: Computation of Load Stresses in a Three Layer Elastic System, Geotechnique, Vol. 2, 1951.
- 40) Jones, A.: Tables of Stresses in Three-Layer Elastic Systems, Highway Res. Board Bulletin 342, pp. 176~214, 1962.
- 41) Burmister, D. M.: The Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems and Applications to the Design of Airport Runways, Proc. HRB, Vol. 23, pp. 126~148, 1943.
- 42) Burmister, D. M.: The General Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems, J. Appl. Physics, Vol. 16, No. 2, 3, 5, 1945.
- 43) Burmister, D. M.: Evaluation of Pavement Systems of the WASHO Road Test by Layered System Methods, Highway Res. Board Bulletin 177, pp. 26~54, 1958.
- 44) Zienkiewicz, O. C.: The Finite Element Method, 3rd Edition, pp. 119~134, 1977.